⋆ 複素積分

領域 D 内で連続な複素関数 $f(z)$ に対し，区分的に滑らかな積分路 C 上，無限に分割するとその和は有限に確定し，積分可能である。

$$\int_C f(z)\ \mathrm{d}z \equiv \lim_{\Delta z_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta z_k$$

積分路 $C : z = z(t)$, $(a \leqq t \leqq b)$ で定義されるとき，

$$\int_C f(z)\ \mathrm{d}z = \int_a^b f(z(t)) \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t$$

定理（絶対値の評価）

$$\left| \int_C f(z)\ \mathrm{d}z \right| \leqq \int_a^b |f(z(t))| \left| \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \right| \mathrm{d}t$$

⋆ コーシーの積分定理

単連結領域 D で $f(z)$ は正則で，単一閉曲線 C が D 内にあるとき．

$$\oint_C f(z)\ \mathrm{d}z = 0$$

定理（二重連結領域のとき） $f(z)$ は領域 D で正則で，D の内側に非正則領域 D' があり，D' を完全に含む単一閉曲線 C_1，C_2 は，D 内で連続的に C_1 を C_2 に変形できるとする．

$$\oint_{C_1} f(z)\ \mathrm{d}z = \oint_{C_2} f(z)\ \mathrm{d}z$$

定理（多重連結領域のとき） $f(z)$ は多重連結領域 D で正則であり，重複せず非正則領域を含む単一閉曲線 $C_1, \cdots, C_n$ とする．

$$\oint_C f(z)\ \mathrm{d}z = \sum_j^n \oint_{C_j} f(z)\ \mathrm{d}z$$

⋆ 不定積分

単連結領域 D で正則な $f(z)$ の積分は経路に依存せず，D で $F'(z) = f(z)$ を満たす一価正則関数 $F(z)$ が存在する．(不定積分)

$$F(z) = \int_C f(z)\ \mathrm{d}z \qquad \int_a^b f(z(t))z'(t)\ \mathrm{d}t = F(z(b)) - F(z(a))$$

⋆ コーシーの積分公式

単連結領域 D 上正則な $f(z)$ において，D 内にある単一閉曲線 C に囲まれた領域の任意の点 α は次のように表される。

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - \alpha}\ \mathrm{d}\zeta$$

公式（導関数） 前述の $f(z)$ は，任意の回数微分可能で，その導関数も D で正則であり，次のように表される．

$$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}z^n}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\ \mathrm{d}\zeta$$

⋆ 冪(べき)級数

次の $z = \alpha$ を中心とする冪級数が，$z = \alpha$ で収束するなら，$|z - \alpha| < R$ で絶対収束する定数 R が存在，収束半径とよぶ．

$$\sum_{n=0} a_n(z-\alpha)^n = a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \cdots$$

定理（冪級数の導関数） 上述の級数は $|z - \alpha| < R$ に対して正則関数であり，次で与えられる導関数も収束半径 R で正則である．

$$\sum_{n=1} n a_n (z-\alpha)^{n-1} = a_1 + 2a_2(z-\alpha) + \cdots$$

⋆ テイラー展開

領域 D で正則な $f(z)$ は，D 内の点 α を中心とした収束半径 R 内の点 z で次のように表される．

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

⋆ ローラン展開

領域 D において，孤立特異点 α から半径 R 内で正則な $f(z)$ は，D 内の点 α を中心とした収束半径 R 内の点 z で次のように表される．

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

主要部による孤立特異点の分類 第一項の $\sum$ をローラン展開の主要部といい，第二項の $\sum$ は正則である．

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-\alpha)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$$

主要部によって，α は次のように分類される．

1. 除去可能な特異点 (主要部が 0)
2. k 位の極 (最大 k 次の有限個の項)
3. 真性特異点 (無限個の項)

⋆ 留数

$f(z)$ の孤立特異点 α における留数は次のように定義される．

$$\mathrm{Res}[f, \alpha] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) \mathrm{d}z$$

$$\mathrm{Res}[f, \alpha] = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to \alpha} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \big((z-\alpha)^k f(z)\big)$$

留数定理 単一閉曲線 C 内の特異点 α_1，$\alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 以外で，C とその内部で $f(z)$ が正則であるなら

$$\oint_C f(z)\ \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f, \alpha_k]$$

応用数学 B 学年末まとめ

Generated by LaTeX.