1 複素数

複素数 $z = x + yi$
極形式 $z = r\,e^{i\theta}$

実部	$x = \mathrm{Re}(z)$
虚部	$y = \mathrm{Im}(z)$
絶対値	$r = \lvert z\rvert = \sqrt{x^2 + y^2} = z \cdot \overline{z}$
偏角	$\arg z = \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 符号注意
共役複素数	$\overline{z} = x - yi = r\,e^{-i\theta}$
偏角の性質	$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$
	$\arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2$

2 オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \left(\left|e^{i\theta}\right| = 1\right)$$

ド・モアブルの公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

3 複素関数

指数関数	$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$
三角関数	$\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
	$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
双曲線関数	$\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$
	$\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$
対数関数	$\log z = \log\lvert z\rvert + i\arg z \ \ (z \neq 0)$
	$\mathrm{Log}\, z$: 主値 $-\pi < \arg z \leqq \pi$

4 極限

$\lvert z - \alpha\rvert \to 0 \ \ (z \neq \alpha)$ のとき次のように表す.

1. $\left|f(z) - \beta\right| \to 0$ なら

$$\lim_{z\to\alpha} f(z) = \beta$$

2. $\left|f(z) - \beta\right|$ が限りなく大きくなるなら

$$\lim_{z\to\alpha} f(z) = \infty$$

5 正則関数

複素平面上の領域 D

1. $\alpha \in D$ の近傍で，あらゆる点が D に属する.
2. D 内の任意の 2 点は，D 上の曲線で結ぶことができる.

関数 $f(z)$ が D で微分可能であれば，$f(z)$ は D で正則.

6 コーシー・リーマンの関係式

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ が D 上正則である必要十分条件

$$u_x = v_y,\ \ u_y = -v_x$$

このとき

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$$

7 調和関数

D 上 C^2 級関数 $\varphi(x,y)$ が次を満たすとき調和関数という.

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$$

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ が D 上正則なら，u，v は調和関数.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,\ \ v_{xx} + v_{yy} = 0$$

また，任意の調和関数を実部にもつ正則関数が存在する.

8 写像

複素関数 $w = f(z)$ は，z 平面上の点から w 平面上の点へ写像する.

正則関数による写像の等角性

D 上正則関数 $w = f(z)$ による，z_0 で交わる z 平面上の 2 曲線と w 平面上のその写像は等角である。$(f'(z_0) \neq 0)$

1 次分数関数

$w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ は，円または直線を円または直線に移す.

9 逆関数

逆関数 : $w = f(z)$ に対し，$z = g(w)$ なる関数 $g(w)$.

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\dfrac{dz}{dw}} \quad \left(\text{または } g'(z) = \frac{1}{f'(g(z))}\right)$$

n 価関数

$w = f(z)$ において，z に対し n 個の値をとる関数.
n 乗根は n 価関数である。

$$\sqrt[n]{1} = e^{i2\pi k/n}$$

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,e^{i\theta/n}\,e^{i2\pi k/n} \ \ (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

無限多価関数

$\log z$ のように無限個の値をとる関数.

応用数学 B 後期中間まとめ Rev.2 - 2008.11.26
by Yuuki Nakamura.
LaTeX